LOGARITMOS EM PORTUGAL (SÉCS. XVII E XVIII)

JOÃO CARAMALHO DOMINGUES[1]

Centro de Matemática – UMinho - CMAT-UM
Campus de Gualtar – Portugal

jcd@math.uminho.pt

SAMUEL GESSNER[2]

Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia - CIUHCT
Campus de Lisboa – Portugal

samuel.gessner@gmail.com

CARLOS CORREIA DE SÁ[3]

Departamento de Matemática – FCUP
Centro de Matemática da Universidade do Porto – CMUP – Portugal

csa@fc.up.pt

Resumo: Os logaritmos, inventados em 1614, chegaram relativamente cedo em Portugal: aparecem em dois manuscritos de 1638 associados à Aula da Esfera. Até meados do séc. XVIII são regularmente ensinados em diversas instituições, sempre como instrumentos para facilitar os cálculos trigonométricos. Mais tarde, começam a ser introduzidos no contexto da aritmética, surgindo exemplos de aplicações não trigonométricas. A partir da Reforma Pombalina da Universidade, entram no campo da análise. Com José Anastácio da Cunha há um tratamento analítico inovador a nível europeu.

Palavras chave: Logaritmos, Portugal, século XVII, século XVIII.

---

1 Participação neste trabalho parcialmente financiada por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade – COMPETE e Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto PEst-C/MAT/UI0013/2011.

2 Participação neste trabalho financiada por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto FCT/MCTES, SFRH/BPD/35072/2007.

3 Participação neste trabalho financiada por Fundos FEDER através do Programa Operacional Factores de Competitividade – COMPETE e por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projecto PEst-C/MAT/UI0144/2011.

LOGARITHMS IN PORTUGAL (17TH AND 18TH CENTURIES)

Abstract: Logarithms, invented in 1614, arrived in Portugal relatively early: they appear in two manuscripts dated 1638 related to the "Aula da Esfera" in Lisbon. Until mid-18th century, they are regularly taught at several schools, always as tools for facilitating trigonometrical computations. Later, they are introduced in the context of arithmetic, and examples of non-trigonometrical applications appear. With Pombal's Reform of the University (1770s), logarithms enter the field of analysis. Finally, with José Anastácio da Cunha there is an analytical treatment that is innovative on the European level.

Keywords: Logarithms, Portugal, 17th century, 18th century.

OS LOGARITMOS NA EUROPA

A história dos logaritmos na Europa dos sécs. XVII e XVIII é bem conhecida (NAUX, 1966-1971; BARBIN et al., 2006; JAGGER, 2003). Nesta secção pretendemos apenas recordar as linhas gerais da sua evolução.

A primeira[4] publicação sobre logaritmos deve-se ao escocês John Napier, ou Neper, (1550-1617) e data de 1614, incluindo uma tabela de logaritmos de senos – o objectivo assumido é simplificar cálculos trigonométricos. No entanto, os logaritmos originais de Napier têm algumas características que são rapidamente abandonadas (p. ex.: são decrescentes e o logaritmo de 1 não é 0). Em colaboração com Napier, o inglês Henry Briggs (c.1561-1630) introduz alterações conduzindo aos logaritmos decimais. Briggs define logaritmos como números com diferenças iguais (ou seja, em progressão aritmética) ligados a números proporcionais (em progressão geométrica). Escolhe 0 como logaritmo de 1 e 1 como logaritmo de 10.[5] Publica uma pequena tabela dos logaritmos dos números de 1 a 1000 (para ser usada em conjunto com tabelas

4 Não nos ocuparemos do trabalho independente do suíço Joost Bürgi (1552-1632), que só publicou as suas tabelas em 1620.

5 Na realidade, nas tabelas usou 10^{14} como logaritmo de 10 – o que corresponde a considerar 14 casas significativas, mas utilizando apenas números inteiros.

trigonométricas) em 1617 e outra maior em 1624 (logaritmos dos números 1 a 20000 e 90000 a 100000). Em 1628 o holandês Adriaan Vlacq (1600-1667) publica uma versão completada desta tabela, com os logaritmos dos inteiros até 100000 e dos senos, tangentes e secantes dos ângulos de 0º a 90º (minuto a minuto). Nas décadas de 20 e 30, Edmund Gunter (1581-1626), William Oughtred (1574-1660) e outros propõem instrumentos de cálculo baseados nas propriedades logarítmicas.

Os logaritmos têm uma rápida difusão pela Europa. Na Alemanha, Benjamin Ursinus (1587-1633) republica as tabelas de Napier em 1618 (e aumenta-as em 1624); Johannes Kepler (1571-1630) publica uma versão ligeiramente modificada dos logaritmos de Napier nos anos 1620; Georg Ludwig Frobenius (1566-1645) publica logaritmos decimais (tabelas de Briggs) em 1634. Em França, o primeiro tratado de Napier é reeditado em 1619; Denis Henrion (?-c.1632) e o inglês Edmund Wingate (1596–1656) publicam sobre logaritmos (briggsianos) e instrumentos logarítmicos na década de 1620. Nos Países Baixos, como vimos, Vlacq publica tabelas em 1628. Em Itália, Bonaventura Cavalieri (1598-1647) introduz os logaritmos (já os briggsianos) em 1632, num livro sobre cálculos astronómicos. Em Espanha, Luís Carduchi (?-1657) terá feito uma tradução aumentada de um texto francês sobre logaritmos (talvez de Henrion) – tradução hoje perdida, mas que Carduchi menciona em 1637 no prefácio a uma edição dos *Elementos* de Euclides; o escocês Hugh Sempill, ou Hugo Sempilio, (1596-1654) usa logaritmos no seu ensino no Colégio Imperial de Madrid, jesuíta, por volta de 1646-48 (NAVARRO-LOIDI & LLOMBART, 2008, p. 85-86). A partir de meados do séc. XVII os logaritmos originais de Napier parecem esquecidos por toda a Europa; as tabelas, que são publicadas em grande número, baseiam-se sistematicamente nas de Briggs e Vlacq; apenas depois da Revolução Francesa haveria uma tentativa de fazer tabelas verdadeiramente novas, mais exactas e usando o sistema centesimal de medida de ângulos (GRATTAN-GUINNESS, 2003).

Paralelamente a esta vertente utilitária, a partir de meados do século XVII os logaritmos vão ganhando lugar em estudos de geometria e análise. Em 1647 é publicado um livro do jesuíta flamengo Gregório de S. Vicente (1584-1667) onde aparece o resultado de que as áreas entre uma hipérbole e uma sua assíntota determinadas por pontos nesta em progressão geométrica são iguais; em 1649, o seu compatriota e discípulo Alphonse Antonio de Sarasa (1618-1667) torna explícita a ligação aos logaritmos. Em 1668 Nicolaus Mercator, ou Kauffmann, (c. 1620-1687) publica um cálculo dessas áreas, para hipérboles equiláteras, através de uma série e utiliza a expressão "logaritmos naturais" para os logaritmos assim obtidos; em notação moderna, Mercator obtém a expansão:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

No mesmo ano, James Gregory (1638-1675) publica uma série que converge bastante mais rapidamente; em notação moderna:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right)$$

ou

$$\ln(y)=2\left(\frac{y-1}{y+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^5+\cdots\right)$$

O aparecimento do método das fluxões de Isaac Newton (1643-1727) e do cálculo diferencial e integral de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) só vem reforçar a importância dos logaritmos naturais; em 1697 Johann Bernoulli (1667-1748) escreve explicitamente $l\,x=\int\frac{dx}{x}$. No curso completo de matemáticas (WOLFF, 1713-1715) do alemão Christian Wolff (1679-1754) pode ver-se um esquema que se tornaria dominante algumas décadas depois: os logaritmos são introduzidos na secção de aritmética, sendo privilegiados os logaritmos decimais; estes são utilizados na secção de trigonometria; na secção de análise infinitesimal são introduzidos e utilizados os logaritmos hiperbólicos.

O culminar da conversão dos logaritmos à análise acontece na *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) de Leonhard Euler (1707-1783), onde a função logaritmo (com uma dada base) é definida como a inversa da função exponencial (com a mesma base).[6]

PRIMEIRAS OCORRÊNCIAS DE LOGARITMOS EM PORTUGAL

Em Portugal, a difusão do conceito dos logaritmos parece ter passado principalmente pelo ensino matemático praticado, com grande continuidade, na chamada "Aula da Esfera", uma cadeira particular, com ensino em vernáculo (e não em latim), incluída no colégio jesuíta de S. Antão em Lisboa.[7] Existem documentos que indicam que os lentes da cadeira, nomeadamente Stafford, Fallon, Rishton, recorreram à noção dos logaritmos durante este período.

O mais antigo documento conhecido que atesta o uso dos logaritmos em Portugal é datado de 1638. Trata-se dum manuscrito que oferece uma exposição sistemática da Trigonometria da autoria de Inácio Stafford (1599-1642) (ou Estaforte), professor na Aula da Esfera entre 1630 e 1636. O mesmo autor descreve também o uso de escalas

---

6 Por essa altura, Euler está envolvido num debate aceso com Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) sobre a questão de os logaritmos dos números negativos serem reais ou imaginários (BRADLEY, 2007); a solução de Euler, publicada em 1751, é exactamente a moderna, onde cada número tem uma infinidade de logaritmos em $\mathbb{C}$.

7 Para uma introdução actualizada sobre o ensino científico na Aula da Esfera veja-se LEITÃO (2007). Grande parte dos documentos associados a essa actividade encontra-se hoje na Biblioteca Nacional de Portugal, em Lisboa, que editou um catálogo sobre este assunto: LEITÃO & MARTINS (2008). Por vezes, a instituição é designada por "Real Academia Mathematica del Collegio de S. Antõ" ou "Real Colégio de S. Antão", o que reflete a sua importância como escola de nobres e quadros técnicos do reino desde fins do século XVI até 1759.

logarítmicas em vários instrumentos na sua "Aritmetica" (1638b), igualmente conservado num único manuscrito. Stafford recebeu a sua formação inicial no colégio inglês de Valladolid, dirigido por jesuítas, antes de chegar a Lisboa em 1624 onde prosseguiu a sua formação em matemática.

O manuscrito *La trigonometria rectilinea y spherica geometrica logarithmica* (STAFFORD 1638a), que tem por objecto principal a resolução de problemas trigonométricos planos e esféricos, oferece no seu princípio uma exposição muita explícita da construção e da utilização das tábuas logarítmicas, indicando definições e uma série de propriedades dos logaritmos apresentados sob a forma de lemas. Aparece aqui a definição de logaritmo por progressões aritmética/geométrica:

> Logaritmos son numeros de la misma progression arithmetica que acompanhan numeros de la misma proporcion geometrica. o. son numeros equedifferentes applicados a otros proporcionales. [...]. (STAFFORD, 1638a, fl. 4rº)

Transcrevendo para uma notação moderna os lemas mais relevantes:

Lema 9: $\log C + \log D = \log CD$

Lema 10: $\log G + \log H + \log I + \log K + \log L = \log GHIKL$

Lema 11: $\log B = A$, implica $\log B^n = nA$

Lema 12: $\log B - \log D = \log B/D$

Lema 13: $\log A - (\log B + \log D + \log F) = \log A/(BDF)$

Lema 14: $(\log N^{fe})/(fe) = \log N$

Todos estes lemas são enunciados retoricamente. Por exemplo, a redacção do Lema 11 é a seguinte:

> A logaritmo de qualquier numero B, multiplicado por el numero o figura denominante, o exponente de qualquier potestad es igual com el logarithmo de la tal potestad del mismo numero B. (STAFFORD, 1638a, fl. 6rº)

Estas propriedades verificam-se no caso dos logaritmos decimais e postulando log 1 = 0, facto que Stafford indica com as seguintes palavras:

> Estos 14 lemmas comprehenden en pocas palabras la quinta essencia logarithmica, y asseguran las operaciones Mathematicas que facilitan. […] los precedentes lemmas acreditan la especie de logaritmos, en que uno, o mas ceros es el logarithmo de 1; 1, con qualesquier numero de ceros el logarithmo de 10. […]. (STAFFORD, 1638a, fl. 6vº)

Destas propriedades é feito uso numa segunda obra de Stafford, que sobrevive em manuscrito, e que se refere várias vezes à *Trigonometria* que, portanto deve ter precedido esta: "Arithmetica practica geometrica logarithmica" (1638b, p. 1-277). Apesar de esta obra seguir uma estrutura semelhante à dos tratados de Aritmética tradicionais, Stafford usa também tábuas logarítmicas e instrumentos matemáticos – os principais são "a pantómetra", o "rádio geométrico", e "a gramelogia", que correspondem ao compasso proporcional (*sector*) e à balestilha (*cross-staff*) publicados por Edmund Gunter em 1623 e ao instrumento logarítmico circular (c*ircles of proportion*) inventado por William Oughtred e divulgado em 1632. O rádio geométrico e a gramelogia contêm ambos escalas que se equiparam às tábuas dos logaritmos decimais e dos logaritmos do seno e da tangente. Os trabalhos de Stafford evidenciam que os instrumentos de Gunter e Oughtred circularam em Lisboa poucos anos após a sua publicação, o que pode ter sido facilitado pelo conhecimento da língua inglesa do Padre Stafford.

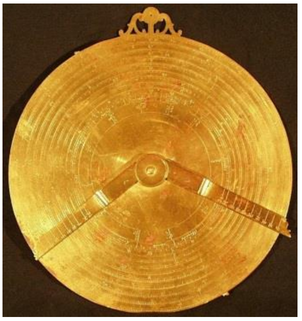

Figura 1: Gramelogia, segundo a descrição de Oughtred, attribuida ao fabricante Elias Allen (ca.1588 - 1653), Londres, década de 1630, em depósito no Museu Nacional de História Natural e de Ciência da Universidade de Lisboa (MNHNC-UL, No. inv. 00501), Foto A. Cabral.

Do sucessor de Stafford, o jesuíta Simão Fallon (ca. 1604-1642) (ou Falónio), não se conhecem obras dedicadas explicitamente à apresentação do conceito ou do uso dos logaritmos. No entanto, nas suas aulas sobre assuntos astronómicos e astrológicos recorre aos logaritmos para efectuar cálculos sem mais explicações.

Conhece-se também um manuscrito intitulado *Os sinquo liuros do compendio das siensias matematicas* (MELO TORRES, 1641), cujos conteúdos, compilados por Francisco de Melo Torres (futuro marquês de Sande), foram ensinados por Fallon, segundo (MOTA, 2011, p. 300). Este tratado revela-se muito escasso em conteúdo técnico e é dedicado sobre tudo à subdivisão das várias sub-disciplinas matemáticas e ao glossário especializado. É no entanto interessante porque os logaritmos não surgem como parte da trigonometria, mas como parte da aritmética.

Mais tarde, outro professor da Aula da Esfera, João Rishton (ca. 1615-1656) (ou Riston, Rashton, originalmente John Farrington) tratará de logaritmos no âmbito do seu *Curso de Mathematica* (RISHTON, 1652-1654), que se conhece pelas notas de um certo João Sarayua. Neste manuscrito, no seguimento de breves tratados sobre trigonometria plana e esférica, aparece um "Compendio da doutrina dos Logorithmos [sic]", onde se dá a definição por progressões aritmética/geométrica e se aponta a utilização dos logaritmos para efeitos de simplificação dos cálculos.

É interessante notar que Rishton deu um parecer sobre a comparação entre o cálculo pelas tábuas e por instrumentos, preferindo o método numérico:

> Não ha dúvida senão na solução dos triangulos por meio das taboadas dos senos, tangentes e secantes, ou por meio dos logarithmos he mais nobre, e perfeita e exacta que qualquer outro modo machanico [sic], ou geometrico contudo quando os ditos modos requerem as taboadas que não estão sempre a mão poremos outros modos que não dependem dellas. (RISHTON, 1652, [f. 96Vº])

OS LOGARITMOS COMO AUXILIARES DA TRIGONOMETRIA (ATÉ 1754)

Durante todo o séc. XVII e a primeira metade do séc. XVIII, os indícios disponíveis apontam para que os logaritmos continuaram a ser usados sobretudo no contexto da trigonometria (plana ou esférica), na Aula da Esfera, na Aula de Fortificação[8] e nos colégios jesuítas de Évora e de Coimbra[9]. Fora desses contextos, é de salientar uma obra dirigida a marinheiros (PIMENTEL, 1712), onde os logaritmos são usados para facilitar a regra de três na lei dos senos, sem explicação – isto é, pressupondo conhecimento prévio do leitor.

Até 1754 foram impressas cinco obras escritas em língua portuguesa em que são tratados os logaritmos:

---

8 Comprovam-no as obras de Luís Serrão Pimentel (1680) e Manuel de Azevedo Fortes (1728) relacionadas com o ensino de engenharia militar nesta aula.

9 Testemunham algumas "teses" de alunos destes colégios. Estas teses, que são mais propriamente folhetos a anunciar uma futura defesa pública de teses de matemática, foram editadas impressas. Muito poucos exemplares sobrevivem até hoje. Uma colectânea existente na Biblioteca Central da Marinha, Lisboa, *Livro de Mathem.*, cota 4.C.4-32 (fundo antigo) contém teses do colégio de Évora dos anos 1695, 1701, 1703, 1725, 1726, 1727 e 1741, assim como uma do colégio de Coimbra de 1719, em que os logaritmos são mencionados.

- o *Methodo Lusitanico* (1680) de Luís Serrão Pimentel;
- o *Engenheiro Portuguez* (1728) de Manuel de Azevedo Fortes;
- a *Trigonometria Plana, e Esferica* (1737) de Manuel de Campos;
- o *Exame de Bombeiros* (1748) de José Fernandes Pinto Alpoim;
- o *Compendio dos Elementos de Mathematica* (1754) de Inácio Monteiro.

Em todas elas, os logaritmos aparecem nos capítulos respeitantes à Trigonometria, com o intuito de facilitar as regras de três que intervêm na resolução de triângulos. São invariavelmente definidos por meio das progressões aritmética/geométrica. Embora os primeiros exemplos sejam mais gerais, nas aplicações à Trigonometria os números 0 e 1 da primeira progressão correspondem sempre aos números 1 e 10 da segunda, pelo que apenas são tratados os logaritmos decimais.

Luís Serrão Pimentel (1613-1679) foi Engenheiro-Mor e Cosmógrafo-Mor do Reino. No seu tratado de fortificação intitulado *Methodo Lusitanico* (PIMENTEL, 1680), após definir logaritmos por progressões aritmética/geométrica, Pimentel apresenta tabelas com exemplos (PIMENTEL, 1680, p. 566):

G

Numeros proporcionaes.	Log. A	Log. B	Log. C	Log. D
1	1	5	5	35
2	2	6	8	32
4	3	7	11	29
8	4	8	14	26
16	5	9	17	23
32	6	10	20	20
64	7	11	23	17
128	8	12	26	14
256	9	13	29	11

K

Numeros proporcionaes.	Log. F	Log. L	Log. M	Log. N
1	4	3	8	47
3	6	7	14	42
9	8	11	20	37
27	10	15	26	32
81	12	19	32	27
243	14	23	38	22
729	16	27	44	17
2187	18	31	50	12
6561	20	35	56	07

Figura 2: Tabelas do *Methodo Lusitanico* com exemplos de logaritmos.

As progressões aritméticas nas colunas D e N são decrescentes, mas nelas apenas se mostram termos positivos.

Pimentel dá vários exemplos de aplicação de logaritmos à resolução de triângulos[10]. No primeiro, dá dois ângulos (32º 20' e 43º 37') e o lado oposto ao primeiro deles (13528 palmos) e pede o lado oposto ao outro ângulo (PIMENTEL, 1680, p. 568). A questão resolve--se por uma regra de três, em consequência da proporcionalidade afirmada pela lei dos senos. Pimentel começa por uma primeira resolução tradicional, mas de seguida resolve novamente a questão, desta vez usando logaritmos (PIMENTEL, 1680, p. 569):

Mas conforme o modo Logarithmico dos modernos ſe devẽ buſcar nas taboas, & diſpor pella ordem ſeguinte a ſaber.

O Logarithmo de 32.gr.20.min.que he	9,7282271
O Logarithmo de 43.gr.37.min. que he	9,8387421
O Logarithmo de 13528.que he	4,1312335
E ſommado o ſegundo num. com o terceiro, & da ſomma	13,9699756
Tirarſe o primeiro numero	9,7282271
Para que fique o quarto numero	4,2417485

Logarithmo de 17448. quaſi, quantidade do lado buſcado A D.

Figura 3: Uso dos logaritmos no Methodo Lusitanico para simplificação de cálculos aritméticos envolvidos na resolução dum triângulo.

É claro que os números a que Pimentel chama "Logarithmo de 32.gr.20.min." e "Logarithmo de 43.gr.37.min." não são log 32º 20' e log 43º 37', mas sim log (sen 32º 20') e log (sen 43º 37'), respectivamente.

Pimentel define também complemento logarítmico, chamando-lhe "complemento aritmético" (1680, p. 569-570).[11]

10 Contudo, Pimental não apresenta as tábuas de logaritmos necessárias para isso – não há tábuas de logaritmos no *Methodo Lusitanico*, que não sejam a da Figura 2. Pimentel pressuporia certamente que os alunos tivessem acesso a tábuas independentes (importadas); ele próprio refere as de Vlacq e Gellibrand.

11 *Complemento logarítmico* é o complemento aritmético, isto é, a diferença, de um logaritmo decimal para o múltiplo de 10 imediatamente superior; é muito fácil de determinar e o seu uso permite utilizar adições em vez de subtracções na simplificação da divisão (e portanto utilizar apenas adições na simplificação da regra de três). Este truque remonta a Gunter, que o sugeriu a Briggs, e em Portugal já tinha sido exposto por Stafford em (1638a).

Manuel de Azevedo Fortes (1660-1749) foi membro da Academia Real de História, Brigadeiro de Infantaria e, tal como Pimentel, Engenheiro-Mor do Reino. Foi autor[12] do *Engenheiro Portuguez* (FORTES, 1728), cujo primeiro volume termina com um "Appendice da Trigonometria rectilinea" (p. 455-537), em que são introduzidos logaritmos. Uma vez mais, a definição é por progressões aritmética/ geométrica e o objectivo é o de tornar mais ligeiros os cômputos envolvidos nas proporcionalidades trigonométricas. As demonstrações consistem na apresentação de exemplos numéricos.

Contrariamente a Pimentel, Fortes considera interessante explicar como se constrói uma tabela de logaritmos de base 10 com uma aproximação tão boa quanto se desejar, apresentando o exemplo da construção de $\log_{10}9$ com sete casas decimais.[13] A ideia é associar médias geométricas a médias aritméticas: dado um par de números numa das progressões e o par correspondente na outra progressão, calculam-se o "meio proporcional aritmético", (isto é, a média aritmética) do par que faz parte da progressão aritmética e o «meio proporcional geométrico» (isto é, a média geométrica) do par que faz parte da progressão geométrica, e fazem-se corresponder um ao outro. Como é óbvio, a

---

12 Na Biblioteca Pública de Évora existe um manuscrito da autoria de Manuel de Azevedo Fortes, datado de 1724, que tem o título «Trigonometria Espherica – Modo de riscar e dar agvadas nas plantas melitares»; é o Códice 258 (Manizola). Na parte dedicada ao estudo dos logaritmos, este manuscrito é claramente a base do texto impresso em 1728, com o qual apresenta semelhanças muito marcadas. As diferenças, raras, não dizem respeito ao conteúdo científico das obras. Fortes esmerou-se mais na redacção do *Engenheiro Portuguez*, completando certas frases da "Trigonometria Espherica", e acrescentando outras, com o intuito óbvio de tornar o texto mais claro e a leitura mais fácil.

13 (Fortes, 1728, p. 492-497). Para obter o valor de $\log_{10}9$ com sete casas decimais, Fortes apresenta 26 pares de médias geométricas e aritméticas. Este exemplo era frequente: aparece em (VLACQ, 1670) e em (WOLFF, 1713-1715).

média aritmética calcula-se de modo expedito, mas o cômputo da média geométrica é em geral muito trabalhoso. Vai-se assim adensando a tabela por meio da construção de novos pares, dum modo que evoca o método das *bissecções sucessivas*. No que aos logaritmos diz respeito, esta exemplificação da construção da tábua é o aspecto mais inovador do *Engenheiro Portuguez* relativamente ao *Methodo Lusitanico*.

Para além duma tábua de logaritmos de linhas trigonométricas, Fortes pressupõe uma outra com os logaritmos dos números naturais até 10000. O cálculo de logaritmos de números maior do que 10000 faz-se por um processo que consiste na divisão por uma potência de base 10 (de modo a obter um número que possa ser lido na tábua), na adição da mantissa adequada e, finalmente, numa interpolação (FORTES 1, 1728, p. 503-506). A questão é exemplificada com o cálculo de log(3567894). Suprimindo os três algarismos da direita, obtém-se 3567, que é inferior a 10000. As tabelas dizem-nos que log(3567) = 3·5523031. Portanto, log(3567000) = log(1000 × 3567) = log(1000) + log (3567) = 3·0000000 + 3·5523031 = 6·5523031. Este número é inferior ao pretendido, por 3567000 também ser inferior a 3567894; o valor que se lhe deve acrescentar calcula-se por interpolação linear (FORTES 1, 1728, p. 505).

Ainda a propósito de números «grandes», um aspecto curioso do *Engenheiro Portuguez* consiste no cálculo de logaritmos de números compostos pela soma dos logaritmos dos factores. O exemplo apresentado é (FORTES 1, 1728, p. 506): log(348874) = log(62×5627) = log(62) + log(5627) = 3.7502769 + 1.7923917 = 5.5426686.

Regressamos à Aula da Esfera do Colégio de Santo Antão com a *Trigonometria Plana, e Esferica com o Canon Trigonometrico Linear, e Logaritmico* (CAMPOS, 1737), do padre jesuíta Manuel de Campos (1681-1758). A obra está dividida em quatro Livros, sendo os logaritmos estudados no Livro II, que tem o título "Da construção do Canon Logarithmico" (p. 22-66). No final do texto, há uma "Synopse dos casos, que commummente ocorrem na Trigonometria Plana, e Esferica" (p. 193-

-212), a que se seguem duas tabelas: o "Canon Trigonométrico Linear, e Logarithmico para todos os Gráos do Quadrante. Calculado com o rayo para as linhas de 100000.00000 partes, e para os logarithmos de 10.0000000000" e a "Taboa Logarithmica dos Numeros Naturaes, desde 1. atè 10.000".

A definição de logaritmo continua a ser por progressões aritmética/geométrica[14]. Tal como fizera Serrão Pimentel, também Manuel de Campos ilustra a definição com algumas tabelas exemplificativas (CAMPOS, 1737, p. 24):

A	B	A	B	A	B	A	B
1	1	3	2	243	0	1	000
2	2	6	5	81	5	10	100
4	3	12	8	27	10	100	200
8	4	24	11	9	15	1.000	300
16	5	48	14	3	20	10.000	400
32	6	96	17	1	25	100.000	500
64	7	192	20	$\frac{1}{3}$	30	1:000.000	600

Figura 4: Tabela da Trigonometria Plana e Esferica com exemplos de logaritmos

Contrariamente ao que acontece nas colunas D e N da tabela dada por Pimentel (Figura 2), nenhuma das quatro progressões aritméticas consideradas nesta primeira tabela é decrescente. Mas Campos aborda esta questão logo de seguida, aproveitando o ensejo para falar de números *"negativos, ou defectivos"* (CAMPOS, 1737, p. 24).

Ainda a propósito da tabela da Figura 4, Campos refere que as correspondências mais vantajosas são do tipo da última, por 1 corresponder a 0 (ou 000) e 10 corresponder a 1 (ou 100 – que não deve ser interpretado como centena, mas sim como unidade representada com duas casas decimais) (CAMPOS, 1737, p. 25).

14 Ao longo da obra, Campos chama frequentemente "numeros naturais" aos termos da progressão geométrica e "numeros artificiaes" aos termos da progressão aritmética, isto é, aos logaritmos dos primeiros.

Desde as primeiras páginas do Livro II, torna-se claro que o nível do tratamento dado aos logaritmos na *Trigonometria Plana e Esferica* é muito superior ao dos dois tratados anteriores. Contrariamente ao *Methodo Lusitanico* e ao *Engenheiro Portuguez*, que são livros eminentemente práticos e onde os logaritmos apenas são mencionados para facilitarem os cálculos, a *Trigonometria Plana e Esferica* do Pe. Manuel de Campos é uma obra com pretensões teóricas. Uma diferença notória relativamente aos seus dois predecessores é que as demonstrações não se resumem a exemplos. A estrutura é completamente dedutiva, fazendo apelo ou a proposições anteriores ou aos *Elementos* de Euclides. Duas originalidades, no contexto português, deste tratado são alguns exemplos de aplicação dos logaritmos ao "anatocismo", isto é, ao cômputo de juros (CAMPOS, 1737, p. 59-64), e a "geração da linha logarithmica" (CAMPOS, 1737, p. 64-66).

Não entraremos em detalhes acerca do *Exame de Bombeiros* (ALPOYM, 1748) de José Fernandes Pinto Alpoim (1700-1765), uma obra que explica o uso das tábuas de logaritmos, sem sequer definir logaritmo.

Seis anos mais tarde foi publicado em Coimbra o primeiro volume do *Compendio dos Elementos de Mathematica* (MONTEYRO, 1754), da autoria do jesuíta Inácio Monteiro (1724-1812), que leccionava matemática no Colégio das Artes de Coimbra. Nesta obra os logaritmos são tratados muito resumidamente. Monteiro define-os por progressões aritmética/geométrica (MONTEYRO 1, 1754, p. 184) e com a motivação usual: facilitar a regra áurea para números muito grandes, que geralmente ocorrem no caso das linhas trigonométricas. As demonstrações resumem-se à apresentação de exemplos numéricos. Mais adiante, Monteiro mostra como utilizar logaritmos para extrair raízes quadradas e cúbicas (MONTEYRO 1, 1754, p. 186) e para achar o quarto proporcional (MONTEYRO 1, 1754, p. 186).

OS LOGARITMOS COMO CONCEITO AUTÓNOMO (A PARTIR DE 1764)

A partir dos anos 60 do séc. XVIII os logaritmos são introduzidos tipicamente na secção de aritmética dos cursos de matemática. Isto representa uma autonomização do conceito de logaritmo – ainda que em muitos casos a sua principal utilidade continue a ser a de facilitadores de cálculos trigonométricos, os logaritmos são introduzidos independentemente da trigonometria e aparecem aplicações a outras áreas (álgebra e cálculo infinitesimal).

O texto que inaugura[15] em Portugal esta autonomização dos logaritmos é o *Novo Curso de Matemática* (BELLIDOR, 1764-1765) de Bernard Forest de Bélidor (1698-1761). Destinado a ser usado nas aulas dos regimentos de artilharia, é uma tradução de (BELIDOR, 1725, 2.ª ed.)[16]. Os logaritmos aparecem no Livro II, que "trata das razões, proporções, e progressões Geometricas, e Arithmeticas: dos logarithmos, e resolução analitica dos problemas do primeiro, e segundo gráo", numa secção própria (BELLIDOR, 1764-1765, t. I, p. 260-280). Mantém-se a definição por progressões aritmética/geométrica. A dedução das propriedades dos logaritmos é feita a partir de um "Theorema Fundamental": "os expoentes de uma serie de potencias de qualquer quantidade, que formem uma progressão geometrica, estão em progressão arithmetica" (esta "série" aparece representada por ":: $q^0 : q^1 : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 : q^6 : q^7 : q^8 : q^9 : q^{10}$, &c.", o que mostra um simbolismo algébrico mais maduro do que as obras vistas nas secções anteriores). Esta introdução aos logaritmos é essencialmente teórica (incluindo uma ideia da construção das tabelas). No entanto, é suficiente para que as

---

15 Pelo menos no universo dos livros impressos. Não é de excluir que um dia se encontre um curso manuscrito anterior a (BELLIDOR 1764-1765) onde os logaritmos sejam introduzidos independentemente da trigonometria.

16 Curiosamente, na primeira edição do original francês os logaritmos surgem apenas na secção de trigonometria e sem explicação, como certos números que aparecem nas tabelas (BELIDOR, 1725, p. 227-230).

aplicações óbvias à trigonometria sejam apresentadas rapidamente numa secção do Livro X (trigonometria) intitulada "Uso dos Logarithmos no calculo dos Triangulos" (BELIDOR, 1764-1765, t. III, p. 35-40).

Deve ter sido também nos anos 60 que José Monteiro da Rocha (1734-1819), ex-jesuíta, futuro professor da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra e futuro sócio da Academia das Ciências de Lisboa, compôs uns *Elementos de Mathematica* que ficaram manuscritos e de que só se conhecem o primeiro e terceiro volumes (MONTEIRO DA ROCHA, s/d-a e s/d-b)[17], mas que, relativamente aos logaritmos, partilham das características gerais desta época enunciadas acima.

A última secção dos *Elementos de Arithmetica* é dedicada à "Theorica, e Practica dos Logarithmos" (MONTEIRO DA ROCHA, s/d-a, fl. 170r-179v). A definição é ainda a mesma. As "demonstrações" são apenas exemplos, mas os logaritmos são tratados com mais detalhe do que tinham sido por Bélidor.

Nos *Elementos de Algebra* aparecem algumas aplicações; por exemplo, o sistema $x^3y^2 = a$, $x^2/y^3 = b$ é resolvido de duas formas, uma delas usando logaritmos para o transformar num sistema linear (MONTEIRO DA ROCHA, s/d-b, fl. 156). Naturalmente, devia ser na trigonometria que os logaritmos teriam mais aplicação; infelizmente, o volume dedicado à geometria e trigonometria está perdido. Também perdido está o quarto volume, que se intitulava *Lições sobre varios pontos*

17 Estes volumes manuscritos não têm indicação do autor, mas correspondem exactamente às descrições de Mateus Valente do Couto num relatório (COUTO, 1825), onde aconselha a não publicação de nenhum dos manuscritos que Monteiro da Rocha deixara à Academia das Ciências – no caso dos *Elementos de Mathematica*, essencialmente devido à desactualização do texto. O mesmo Mateus Valente do Couto conjectura que estes *Elementos* datem de antes dos anos 70 do séc. XVIII, devido à referência de Monteiro da Rocha, no prolegómeno, à falta de cultivo da matemática em Portugal: de facto, são com certeza anteriores à Reforma Pombalina da Universidade (e à adopção dos manuais de Bézout).

interessantes da Mathematica, mas que Mateus Valente do Couto identificou como constituindo um volume sobre cálculo diferencial e integral (COUTO, 1825); é natural que neste volume aparecessem, talvez pela primeira vez em Portugal, os logaritmos hiperbólicos, com as óbvias aplicações ao cálculo integral.

Na Faculdade de Matemática, criada na Universidade de Coimbra pela Reforma Pombalina de 1772, o ensino dos logaritmos seguia naturalmente o mesmo paradigma: segundo as detalhadas instruções "Da distribuição das Lições pelos Annos do Curso Mathematico" (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 1772, livro III, p. 169-197), no 1.º ano ensinar-se-ia, sucessivamente, Aritmética, Geometria Elementar e Trigonometria Plana – incluindo na Aritmética os "Numeros artificiaes, e subsidiarios, conhecidos pelo nome de Logarithmos", com as suas aplicações às operações numéricas, e na Trigonometria as tábuas de senos, tangentes e secantes, "tanto naturaes, como artificiaes" – e no 2.º ano Álgebra e Cálculo Diferencial e Integral – incluindo na segunda parte a diferenciação e integração das expressões exponenciais e logarítmicas e o uso dos logaritmos na integração.

Naturalmente, o mesmo se observa nos compêndios adoptados para o ensino na Faculdade de Matemática; os que nos interessam aqui (BEZOUT, 1773, 1774a, 1774b) são traduções de partes do *Cours de Mathématiques* de Étienne Bézout (1730-1783), publicado originalmente entre 1764 e 1769.

Aos logaritmos é dedicada a última secção do compêndio de Aritmética (BEZOUT, 1773, p. 198-224). A explicação é detalhada, aparecendo mesmo uma pequena tábua com os logaritmos de 1 até 200. O tradutor, Monteiro da Rocha, acrescenta um outro tipo de logaritmo para números menores que 1 – com característica negativa mas dízima positiva: para $0 < x < 1$ e $1 < 10^n x < 10$, trata-se de tomar $\log x = -n$

+ log $10^n x$; é fácil ver que isto é equivalente a usar complementos logarítmicos (BEZOUT, 1773, p. 209-211).[18]

Estando os logaritmos explicados na Aritmética, o compêndio de Trigonometria (BEZOUT, 1774a) limita-se a usá-los naturalmente, sem necessidade de mais explicações. No volume dedicado à Álgebra (BEZOUT, 1774b, t. I), tal como acontecia em (MONTEIRO DA ROCHA, s/d-b), aparecem algumas, poucas, aplicações; por exemplo, resolver a equação $u = a\, q^{n-1}$ em n (BEZOUT, 1774b, t. I, p. 259-261).

No volume dedicado ao Cálculo Diferencial e Integral (BEZOUT, 1774b, t. II) surgem novidades[19] de maior monta – os logaritmos entram no campo da análise. Para diferenciar os logaritmos, Bézout (1774b, t. II, p. 23-28) toma as diferenças entre dois termos consecutivos da progressão geométrica e entre os dois termos consecutivos correspondentes da progressão aritmética de um sistema de logaritmos, encontra uma expressão para a razão entre essas duas diferenças e, finalmente, faz essas diferenças infinitamente pequenas, concluindo que, sendo x o logaritmo de y, a relação entre as suas diferenciais é $\frac{ma\,dy}{y} = dx$, onde a é o primeiro termo da progressão geométrica e m é o *módulo* do sistema de logaritmos – isto é, a razão da diferença dos dois primeiros termos da progressão aritmética para a diferença dos dois primeiros termos da progressão geométrica (de notar que este conceito só é introduzido aqui). Escolhendo um sistema em que $a = 1$ e $m = 1$, temos a relação mais simples $\frac{dy}{y} = dx$; é assim no

---

18 Apesar de se tratar de matéria acrescentada por José Monteiro da Rocha, convém esclarecer, primeiro, que não aparece em (MONTEIRO DA ROCHA, s/d-a) e, segundo, que não há qualquer presunção de originalidade: não só Monteiro da Rocha diz que "Alguns exprimem os Logs. das fracçoens" dessa maneira, como se encontra essa alternativa, por exemplo, em (MARIE, 1768, p. 22-23).

19 "Novidades" no contexto português, claro, e restringindo-nos a textos conhecidos; se o manuscrito de Monteiro da Rocha relativo ao Cálculo Diferencial e Integral mencionado acima vier a aparecer, o panorama deverá mudar.

sistema "de que se usa nos calculos algebricos", diferente do "das taboas".[20]

A curva logarítmica é estudada brevemente (BEZOUT, 1774b, t. II., p.34-35), concluindo-se que tem subtangente constante (modernamente diríamos que esta curva é a exponencial já que, relativamente ao nosso uso, há uma troca de eixos: os logaritmos aparecem nas abcissas).

Os logaritmos são utilizados no cálculo diferencial para diferenciar quantidades exponenciais (BEZOUT, 1774b, t. II., p. 28-29). Mas, naturalmente, a maior parte das suas aplicações surge no cálculo integral. Desde logo, para calcular $\int a\,x^{-1}dx$ e integrais semelhantes (p. 101 e 169-171), calcular áreas hiperbólicas (p. 171-173) e integrar quantidades exponenciais (p. 201-202). Mas também há uma longa passagem (p. 173-180)[21] sobre a aplicação dos logaritmos às cartas reduzidas (isto é, que seguem a projecção de Mercator: a distância de um paralelo ao equador nessas cartas, medida em radianos, é obtida integrando $\frac{dx}{1-xx}$, onde x é o seno da latitude, e vem a ser igual ao logaritmo da cotangente de metade do complemento da latitude)[22].

Para além de aplicações dos logaritmos, surgem também aplicações do cálculo integral *aos* logaritmos. Na secção sobre o "methodo de integrar por aproximaçaõ" (BEZOUT, 1774b, t. II., p. 143-161), que trata na realidade apenas de integração por séries, isto é, expansão em série de potências seguida de integração termo a termo, Bézout calcula $\int \frac{dx}{a+x}$ e $\int \frac{2a\,dx}{aa-xx}$, obtendo as séries de Mercator e Gregory para o logaritmo (o dos "cálculos algébricos"); além disso, a integração de $\frac{dy}{y}=dx$ e de $\frac{m\,dy}{y}=dx$ mostra que para passar do sistema de

20 Na segunda edição, "correcta e accõmodada para o uso das Escolas de Mathematica da Universidade", mas não na primeira nem no original francês, é usada a expressão "logarithmos hyperbolicos", por oposição aos "tabulares" (BEZOUT, 1794, p. 25).

21 Esta passagem desaparece na 2.ª edição (BEZOUT, 1794).

22 Este resultado, ou algo equivalente, foi descoberto cerca de 1650 por Henry Bond e demonstrado pela primeira vez por Edmond Halley em 1696. Mas o raciocínio apresentado por Bézout está no seguimento de uma demonstração bastante mais simples, publicada por Roger Cotes em 1714 (GOWING, 1995).

logaritmos do cálculo para outro sistema em que 1 seja igualmente o primeiro termo da progressão geométrica basta multiplicar os logaritmos do primeiro sistema pelo módulo do segundo – assim, para calcular os logaritmos das tabelas ordinárias pode-se utilizar a série de Gregory, multiplicando depois os resultados pelo inverso do logaritmo de 10; finalmente, Bézout aplica o "methodo inverso das series" à série de Mercator para obter uma série que, dado um logaritmo, dá o número de que esse é o logaritmo, observando depois que se trata da exponencial e^z.[23]

Se este compêndio de Bézout introduziu os logaritmos na análise (no contexto português), dois textos (1778; 1790) de José Anastácio da Cunha (1744-1787) abordam os logaritmos de um ponto de vista puramente analítico e puramente teórico – os logaritmos são definidos através de uma equação funcional ou como função inversa da exponencial; as aplicações à trigonometria reduzem-se a uma brevíssima referência (quatro linhas) num escólio sobre resolução de triângulos esféricos (CUNHA, 1790, p. 231). Para além disto, estes dois textos tentavam introduzir na teoria das potências e logaritmos um rigor maior do que o que existia então, não só em Portugal como a nível europeu, dando definições que se aplicassem efectivamente a todos os números positivos. São assim, a vários títulos, um caso à parte na literatura portuguesa sobre logaritmos.

"Logarithms & powers" (CUNHA, 1778) é um manuscrito descoberto e publicado recentemente, com a particularidade de ter sido escrito em inglês (caso raríssimo na ciência portuguesa do séc. XVIII).[24] O objecto de ataque são as abordagens pouco rigorosas aos logaritmos e potências – no prólogo Anastácio da Cunha critica a definição habitual de potência como multiplicação repetida, por só se aplicar aos casos de expoentes inteiros positivos e "the two vulgar definitions of

23 A notação *e* para o "numero, cujo logarithmo he 1" é introduzida aqui e usada mais tarde. Curiosamente, no cálculo diferencial a letra usada tinha sido *c* (p. 28-29). Na segunda edição a notação foi uniformizada, para *e*.

24 Sobre este texto, v. (DOMINGUES et al., 2006).

logarithms" por excluírem logaritmos irracionais; tendo visto que todos os textos publicados em Portugal até então davam a mesma definição de logaritmo, pode parecer estranho ver uma referência a *duas* definições vulgares; presumivelmente a segunda seria a de Euler (1748): logaritmo como função inversa da exponencial.[25] Outras abordagens, menos habituais, sofriam de outras falhas de rigor.

A definição alternativa de Anastácio da Cunha consiste numa (quase?) equação funcional (faltará talvez precisar que se trata de uma função!):

> Logarithms of numbers are other numbers adapted to the first in such a manner that the sum of any two logarithms is the Logarithm of the product of their numbers. (CUNHA 1778, p. 64-65)

Potência é definida à custa de logaritmo: a base ("basis") é o número cujo logaritmo é 1 e cada número é a potência ("power") da base expressa pelo seu logaritmo. Seguidamente, Anastácio da Cunha prova que, se x é um logaritmo, então o número de que é logaritmo é expresso por uma série da forma:

$$1+Mx+\frac{MM}{2}xx+\frac{MMM}{2\cdot 3}xxx+\frac{MMMM}{2\cdot 3\cdot 4}xxxx+etc. \tag{1}$$

(M é um número positivo que é mais tarde referido como "the modulus" – e é de facto o módulo do sistema de logaritmos); a demonstração consiste em constatar que estas séries verificam a

25 É claro que se, na opinião de Anastácio da Cunha, a definição de potência só prevê expoentes inteiros positivos, a definição de logaritmo de Euler não pode contemplar logaritmos irracionais. Quanto à definição por progressões aritmética/geométrica, sendo os logaritmos obtidos como médias aritméticas, nunca poderão ser incomensuráveis com a base do sistema.

equação funcional.[26] A convergência da série é tida por evidente, devido à "lei do denominador" (o que talvez seja uma aplicação do chamado critério de d'Alembert).

Usando as suas definições e a série (1), Anastácio da Cunha deduz (com argumentos resumidíssimos) as propriedades essenciais da aritmética de potências, incluindo a série binomial. Explicitamente sobre logaritmos, aparece a série de Mercator, obtida da série (1) por reversão ("regression", o que Bézout tinha chamado "methodo inverso das series"). Nos escólios que ocupam a metade final do texto, aparecem rapidamente a série de Gregory e a relação entre as fluxões de um número e do seu logaritmo. Nestes escólios são também referidas as questões polémicas envolvendo logaritmos negativos. Aqui Anastácio da Cunha abre a porta à consideração de potências como multiplicações repetidas (e extracção de raízes), no caso de logaritmos (isto é, expoentes) racionais; então a base pode ser negativa, a menos que o denominador do expoente seja par, caso em que a potência é "[un]imaginable or impossible"; a polémica sobre se a curva logarítmica é simétrica relativamente à sua assíntota é atribuída à falta desta distinção (presumivelmente, a distinção entre estes dois conceitos de logaritmos). No entanto, e embora pense que a sua definição de logaritmo é a mais extensiva que pode ser dada, Anastácio da Cunha não consegue concluir daí a impossibilidade absoluta de logaritmos de números negativos.

Num longo escólio com que termina este texto, "for curiosity's sake", Anastácio da Cunha apresenta a *análise* pela qual, diz, tinha chegado aos teoremas apresentados (embora, de facto, nenhuma das séries de que dá a análise fosse nova). Esta passagem tem uma secção análoga nos *Principios Mathematicos* (CUNHA, 1790) – a sua única publicação (parcial) em vida. De facto, no livro XXI (o último, e que parece consistir de vários problemas soltos), a secção V é dedicada à

---

26 Isto é, a série $1+M(x+z)+\frac{MM}{2}(x+z)(x+z)+etc.$ é o produto de $1+Mx+\frac{MM}{2}xx+etc.$ por $1+Mz+\frac{MM}{2}zz+etc.$

"Investigaçaõ de logarithmos e potencias" e mais precisamente à obtenção das suas séries de potências (de Mercator e, a partir desta, de Gregory, no caso dos logaritmos) pelo método dos coeficientes indeterminados. O aspecto mais interessante é a definição de logaritmo que é apresentada para este efeito, e que é (sem reservas) uma definição por equação funcional:

> *lx*, logarithmo de *x*, he huma funcção de *x*, tal, que, pondo quaesquer numeros *a*, *b*, e o producto *ab* em lugar de *x*, sempre he $la + lb = l(ab)$. (CUNHA, 1790, p. 286)

Embora tenha o cuidado de colocar em dúvida a possibilidade de dar a forma de série de potências ao logaritmo (e à potência – função exponencial), Anastácio da Cunha não mostra aqui preocupação com a convergência das séries resultantes.

Mas, tal como em (CUNHA, 1778), essa análise é um comentário à parte da teoria dos logaritmos. Esta é apresentada no livro VIIII (CUNHA, 1790, p. 106-120), dedicado às séries convergentes, potências e logaritmos, famoso por apresentar uma definição de "serie convergente" equivalente ao que hoje chamamos critério de Cauchy (e utilizá-la em demonstrações) e definir exponencial (ou antes "potencia") através da sua série de potências (ou seja, em termos modernos, como função analítica):

> Representem *a* e *b* dois numeros quaesquer, e seja *c* o numero que faz $1+c+\frac{cc}{2}+\frac{ccc}{2\times 3}+\frac{cccc}{2\times 3\times 4}+etc.=a$: a expressaõ a^b segnificará hum numero $=1+bc+\frac{bbcc}{2}+\frac{bbbccc}{2\times 3}+\frac{bbbbcccc}{2\times 3\times 4}+etc.$; e se chamará o numero a^b potencia de *a* indicada pelo expoente *b* (CUNHA, 1790, p. 108-109).

(tendo antes provado a convergência das séries deste tipo); a existência de tal número *c*, dado *a* positivo, é verificada a seguir, apresentando uma série para *c* (a série de Gregory – note-se que *c* é o logaritmo natural de *a*). Seguem-se a aritmética das potências e a série binomial.

Este livro VIIII, extremamente conciso mas genial, termina então com apenas duas meias páginas sobre logaritmos: a definição como inversa da exponencial:

> Considerando todos os numeros como potencias de hum mesmo numero, chama-se esse base; e os expoentes chamam-se logarithmos dos numeros a que pertencem" (CUNHA, 1790, p. 119),

a definição dos "logarithmos hyperbolicos", ou "naturaes", (base $1+1+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+etc.$) e quatro propriedades: $la^n = nla$, $l1 = 0$, $l(ac) = la + lc$ e $l\frac{a}{c}= la-lc$. No entanto, devemos ter em consideração que vários dos resultados apresentados sobre potências podem ser lidos como resultados sobre logaritmos (incluindo a série de Gregory, já mencionada).

Embora a solução seja diferente, o livro VIIII de (CUNHA, 1790) resolve o mesmo problema que (CUNHA, 1778): como a nova definição de potência admite quaisquer expoentes, o logaritmo pode ser definido como a inversa da exponencial.

CONCLUSÕES

Os logaritmos foram adoptados rapidamente em Portugal, na sua vertente utilitária, de auxílio aos cálculos trigonométricos (logaritmos decimais). Neste aspecto não se notam diferenças relativamente aos outros países europeus. Já a versão analítica dos logaritmos (logaritmos hiperbólicos, indispensáveis no cálculo integral) demorou bastante a aparecer – o que acompanha a demora no aparecimento em Portugal do cálculo diferencial e integral. No entanto, isto não impediu que os logaritmos ficassem ligados à originalidade do trabalho matemático de José Anastácio da Cunha.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALPOYM, J. F. P. *Exame de Bombeiros*, Madrid, 1748.

BARBIN, É. et al. *Histoires de Logarithmes*, Paris: Ellipses, 2006.

BELIDOR, B. F. *Nouveau Cours de Mathématique à l'usage de l'Artillerie et du Génie*, Paris: Claude Jombert, 1725; 2.ª ed., Paris: Nyon, 1757.

BELLIDOR, B. F. *Novo Curso de Mathematica para uso dos Officiaes Engenheiros, e Artilheria*, trad. de (BELLIDOR, 1725, 2.ª ed.) por Manoel de Sousa, 4 tomos, Lisboa: Officina de Miguel Manescal da Costa, 1764-1765.

BEZOUT, É. *Elementos de Arithmetica*, trad. do francês, Coimbra: Real Officina da Universidade, 1773.

BEZOUT, É. *Elementos de Trigonometria Plana*, trad. do francês, Coimbra: Real Officina da Universidade, 1774a.

BEZOUT, É. *Elementos de Analisi Mathematica*, trad. do francês, 2 tomos, Coimbra: Real Officina da Universidade, 1774b.

BEZOUT, É. *Elementos de Analyse*, t. II, 2.ª ed. revista de (BEZOUT, 1774b, t. II), Coimbra: Real Officina da Universidade, 1794.

BRADLEY, R. E. "Euler, D'Alembert and the Logarithm Function", em R. E. Bradley & C. Edward Sandifer (eds.), *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, Elsevier, 2007, p. 255-277.

CAMPOS, Manoel de. *Trigonometria Plana e Esférica com o canon trigonométrico linear e logaritmico*. Lisboa Occidental, 1737.

COUTO, M. V. do. "Relatorio do parecer da Comissaõ nomeada para examinar os manuscriptos do S.r J. Monteiro da Rocha, que constaõ da Relaçaõ appensa", Biblioteca da Academia das Ciências de Lisboa, Processo do académico José Monteiro da Rocha, 1825.

CUNHA, J. A. da. "Logarithms & powers", em Maria Elfrida Ralha, Maria Fernanda Estrada, Maria do Céu Silva & Abel Rodrigues (eds.), *José Anastácio da Cunha. O Tempo, as Ideias, a Obra e... Os*

Inéditos, vol. 2, p. 58-85, Braga: ADB/UM, CMat-UM, CMUP, 2006. Publicação de manuscrito com data de 1778.

CUNHA, J. A. da. *Principios Mathematicos*, Lisboa, 1790.

DOMINGUES, J. C., DUARTE, A. L., RALHA, M. E. & RODRIGUES, J. F. "*Logarithms & Powers*: Um Comentário", em Maria Elfrida Ralha, Maria Fernanda Estrada, Maria do Céu Silva & Abel Rodrigues (eds.), *José Anastácio da Cunha. O Tempo, as Ideias, a Obra e... Os Inéditos*, vol. 1, p. 277-296, Braga: ADB/UM, CMat-UM, CMUP, 2006.

EULER, L. *Introductio in analysin infinitorum*, 2 tomos, Lausana, 1748.

FORTES, M. de A. *O Engenheiro Portuguez: dividido em dous Tratados*. Lisboa Occidental, 1728.

GOWING, R. "Halley, Cotes, and the Nautical Meridian", *Historia Mathematica* 22, p. 19-32, 1995.

GRATTAN-GUINNESS, I. "The computation factory: de Prony's project for making tables in the 1790s", em Martin Campbell-Kelly, Mary Croarken, Raymond Flood, and Eleanor Robson (eds.), *The History of Mathematical Tables – from Sumer to spreadsheets,* p. 105-121, Oxford University Press, 2003.

JAGGER, G. "The making of logarithm tables", em Martin Campbell-Kelly, Mary Croarken, Raymond Flood, and Eleanor Robson (eds.), *The History of Mathematical Tables – from Sumer to spreadsheets,* p. 49-77, Oxford University Press, 2003.

LEITÃO, H. *A Ciência na "Aula da Esfera" do Colégio de Santo Antão, 1590-1759,* Lisboa: Comissariado Geral das Comemorações do V Centenário do Nascimento de S. Francisco Xavier, 2007.

LEITÃO, H. & MARTINS, L. (coords.). *Sphæra Mundi: A Ciência na Aula da Esfera. Manuscritos científicos do Colégio de Santo Antão nas colecções da BNP*, Lisboa: Biblioteca Nacional de Portugal, 2008.

MARIE, A. J. F. "Des logarithmes et de l'usage des tables", em *Tables de Logarithmes*, Paris: Desaint, 1768.

MELO TORRES, F. de. *Os sinquo liuros do compendio das siensias Matematicas. De F*[*rancisco de Mello*] a*o Serenisimo Principe Dom tiadozo N*[*osso*] *S*[*enhor*], Biblioteca Nacional de Portugal, Lisboa, Cod. 2260, entre 1641 e 1653.

MONTEIRO DA ROCHA, J. *Elementos de Mathematica* (*Prolegomenos* e *Elementos de Arithmetica*), Biblioteca da Academia das Ciências de Lisboa, ms. Azul 371, s/d-a.

MONTEIRO DA ROCHA, J. *Elementos de Algebra*, Biblioteca da Academia das Ciências de Lisboa, ms. Azul 397, s/d-b.

MONTEYRO, I. *Compendio dos Elementos de Mathematica*, Lisboa, 1754.

MOTA, B. *O estatuto da matemática em Portugal nos séculos XVI e XVII*, Lisboa: FCG e FCT-MCTES, 2011

NAUX, C. *Histoire des logarithmes de Neper à Euler*, 2 vols., Paris: Blanchard, 1966-1971.

NAVARRO-LOIDI, J. & LLOMBART, J. "The introduction of logarithms into Spain", *Historia Mathematica* 35, p. 83-101, 2008.

PIMENTEL, L. S. *Methodo Lusitanico de desenhar as fortificaçoens das praças regulares & irregulares, fortes de campanha e outras obras [...]*, Lisboa, 1680.

PIMENTEL, M. *Arte de Navegar*, Lisboa, 2.ª ed., 1712.

RISHTON, J. *Curso de Mathematica […]*, Lisboa, Biblioteca Nacional de Portugal, Lisboa, Cod. PBA 54, entre 1652 e 1654.

STAFFORD, I. *La trigonometria rectilinea y spherica geometrica logarithmica*, Biblioteca da Academia das Ciências de Lisboa, Ms. 392, série vermelha, 1638a.

STAFFORD, I. *Varias obras mathematicas compuestas por el P. Ignacio Stafford, mestre de mathematica en el Colegio de S. Anton de la Compañia de Iesus, y no acavadas por cauza de la muerte del dicho Padre*, Lisboa, Biblioteca Nacional de Portugal, Lisboa, Cod. PBA 240, 1638b.

UNIVERSIDADE DE COIMBRA. *Estatutos da Universidade de Coimbra*, 3 livros, Lisboa: Regia Officina Typografica, 1772.

VLACQ, A. *Tables de Sinus, [...] et de Logarithmes […]*, Lyon, 1670.

WOLFF, C. *Elementa Matheseos Universae*, 2 tomos, Halle, 1713-1715.